

切頂二十面体の作成を通じた 初等教育教員養成課程の大学生の反応に関する一考察

加藤 竜吾*

本稿の目的は、数学的活動の事例として切頂二十面体（サッカーボール）の作成を初等教育教員養成課程の大学生に実施した事例について考察し、学生が数学的性質に特化して数学的活動を行う際の効果と課題について明らかにすることである。

結論として、出来栄に差はあるものの、すべての学生は、切頂二十面体を作成することができた。一方、その過程を通して、長方形の紙から正三角形を折り、それを活用して正六角形を折る活動は、数学的な背景を理解して着実に進めていくことができる学生と、集中して折ることや切ること組み立てることができない学生の半数ずつに分かれた。事後調査では、この数学的活動を通して、多くの学生は友達と話し合いながら進めていくこともできたので達成感と満足感を感じることができていたが、工作を得意としない学生には、集中して進めていく作業も含めて困難を感じた学生もいたことが明らかになった。

今後の課題としては、第一として、数学的な性質と折る活動を充実させることにより折ることを通じた数学的な意味理解を深めること、第二として、小さな立体図形から考えていくことにより工作を苦手とする受講者にもスモールステップで習熟させていくことが考えられる。

Key words：数学的活動，切頂二十面体，サッカーボール，切る活動，折る活動

1. はじめに

小学校学習指導要領算数科及び中学校学習指導要領数学科（文部科学省；2019）、高等学校学習指導要領数学科（文部科学省；2020）では、いずれも「数学的活動」を取扱うこととなった。これまでの算数的活動も含めた数学的活動は、算数・数学科の学習における目標の一つとして取り上げられているが、学習指導の内容の多さから直接学んだ経験があると答える児童・生徒・学生は多くない。又、算数・数学科を指導する教師も自身が学んできた経験が少ないことと考えられることや問題演習を十分行うことに時間を割きたいため、子どもたちに指導することが少ないのではないかと

考えられる。

そこで、本稿では、1時間半から2時間程度で取り上げることができる数学的活動の事例として切頂二十面体（サッカーボール）の作成を初等教育教員養成課程の大学生に実施した事例について紹介することを目的とする。

2. 数学的活動と切頂二十面体をめぐる各分野での先行研究

数学的活動は、従前、小学校では算数的活動と呼ばれていたものを小・中・高等学校教育を通じて資質・能力の育成を目指す際に行われるものであるため、中学校や高等学校と同様に必要な活動

*文京学院大学教職課程センター

であるため、算数科でも「数学的活動」に改められたものである（文部科学省；2019）。現行小学校学習指導要領算数科では、各学年の共通項目として、「日常の事象から算数の問題を見い出して解決する」ことが含まれている。特に低学年では、操作的な活動も重視されており、身の回りの事象を観察したり、実体験したことから算数的な意義を見出すこと、学習場面や生活場면을追体験したり、具体的操作活動を通して学習場面向かうことが求められており、初等教育教員養成課程の大学生が、実際に数学的活動を行うことで体感することは算数科を指導する上で大切なことであると考える。その上で、切頂二十面体の作成は、効果的な教材であると考えられる。

切頂二十面体は、サッカーボールの形状をしていることと様々な分野での応用等もされるため、多面体全般的な視点からも多くの研究がなされている。

数学の分野では、図形的な成り立ちから多面体の展開図等の研究（三谷、鈴木；2005）や離散ソボレフ不等式の最良定数についての研究（山岸；2014）、対称群の研究（B. Kostant；1995）などがあり、数学教育学の分野では、球面正多面体の教材の開発に焦点を当てた研究（井上；2007）や多面体の工作を市民向けに行った報告（青木；2013）などがある。

化学の分野においては、切頂二十面体がカーボン60（ C_{60} ）であることから、カーボンナノチューブやグラファイトなどとの構造的な対比や存在確率など1990年代に着目されてから多くの研究がなされている（谷垣；1999、中村；2017など）。

しかし、数学的活動に着目して、学生に対し、正多面体を「測る」ことをしないで、数学的性質に特化して「はさみで切る」、「紙を折る」活動だけで実践されている事例はない。そこで、基本的な数学的性質を活用して切頂二十面体を学生が作成し、この数学的活動のどの部分に効果があり、また課題があるのかについて次に考察していく。

3. 長方形の紙から正三角形を折る活動

普段、学生はコピー用紙等に触れる機会は多いと考えられるが、長方形から折る活動だけで正三角形を折ることはほとんどできる学生はいない。その原因として、コンパス・定規で作図する活動と紙を折ることで中点を求めたり、長さを測ったりする活動が別物であると考えていることにあると考えられる。

長方形の紙から、正三角形を折ることで作る活動の一つの方法は、垂直二等分線の性質を活用することで求めることができる（黒木；2009）。

長方形の紙を縦方向に半分に折ることで長方形の横の1辺の垂直二等分線を作成できる。更に、横の1辺の頂点を垂直二等分線に合わせて折ることで横の辺を1辺とする正三角形の他の辺を折ることができる。このことを図で表すと、図1のようになる。

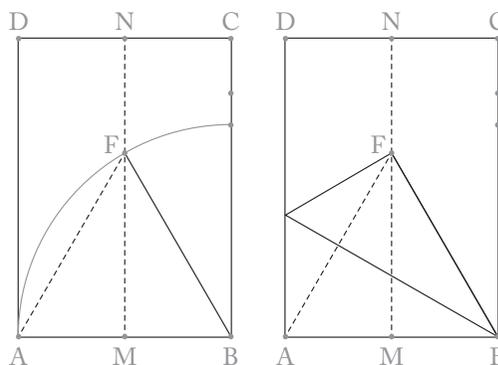


図1 長方形から正三角形を折るイメージ

□ABCDにおいて、辺BCを辺ADに重なるように折ると辺ABの垂直二等分線MNを求められる。そして、辺ABの長さと同じ長さになるように辺MN上に点Fを取ることで、正三角形のもう1辺を作ることができる。この操作で $\angle ABF = 60^\circ$ が得られるので、折り込んでいくことで $\triangle ABF$ が正三角形として得られる。この活動は、コンパスで垂直二等分線を作図する性質の逆を利用している。



図2 正三角形を折る作業

4. 正三角形から正六角形を折る活動

切頂二十面体は、正六角形20枚と正五角形12枚から構成される。一般に正六角形は、円と同じ半径の弦を取っていくことで作成することができるが、ここでは、正三角形から正六角形を作成することを考える（黒木；2009，渡辺；2020）。

前章で作成した正三角形を基に正六角形を作成するためには正三角形の重心を探することを考える。

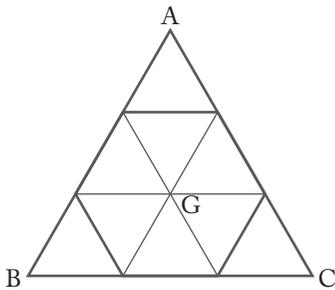


図3 正三角形から正六角形を折るイメージ

図3において、三角形の重心は頂点とその対する辺の中点を2：1に内分する点であるが、それは、2つの頂点B，Cから重心Gに向かって折った辺が一直線になるように折れば良い。残りの頂点Aもその重心Gに向かって折ることで正六角形を作成することができる。操作としては、大雑把なものであるが、正三角形が正確に作成されていれば概ね良好な正六角形を得ることができる。なお、その端の小さな正三角形は結合させていく際の糊代とする部分である。

5. 切頂二十面体の作成

今回作成する切頂二十面体のうち、正五角形の部分は穴開きにして作成するものとする。

今回は、A4版のケント紙¹⁾を使用して作成する。その際、図4のように縦方向に4等分した長方形を使用する。その長方形から正確に正三角形を折ることで9枚を得ることができる。よって、合計36枚用意することができるが、状態の良い20枚を使用すると良い。なお、残りの正三角形で切頂四面体や切頂八面体も併せて作成することができる。

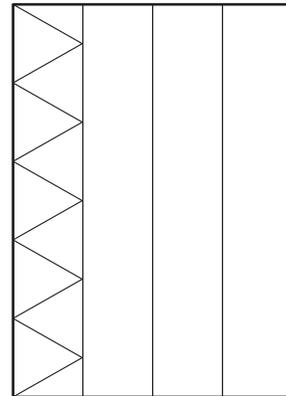


図4 A4版の長方形から正三角形の作成



図5 A4版の長方形を4等分する作業

4等分した長方形から初めの正三角形を作成する。本来であれば垂直二等分線を折るが、折筋をしっかりと付けてしまうと仕上がった切頂二十面体の面に折筋が残ってしまう。そこで、図1の辺ABの

中点Mを点A, Bを重ねることで見付け, その垂直二等分線になるだろう点Fの辺りに少しだけ印を付ける程度に折り目を付けることにする. その後は, まず, 正三角形を正確に折る. 次の正三角形を元の正三角形の 60° を利用して折り込む.

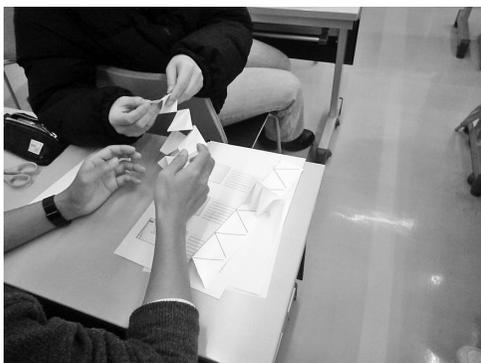


図6 蛇腹に折って正三角形を作る作業

その際, 一方方向に折り込んでしまうと, 折り目のズレが生じていくため, 表, 裏, 表, 裏, …のように互い違いに折り込み, 蛇腹状態で作成する.

長方形を3本使用することで, 正三角形を20枚できる. そこで, 折り上がったら, はさみで正三角形を丁寧に切り取る. 正三角形ができたところで, 前章手順により, 正六角形を20枚作成する.

ここまでの一連の作業は, 20枚ずつまとめて作業をした方が, 取り組みやすいと考えられる.



図7 正三角形から正六角形を作る作業

最後に正六角形20枚を貼り合わせていく. 正三角形の頂点側の3か所をそれぞれ糊代とし, 正五

角形が穴開きとなるように貼る. その際, 注意して正五角形の穴ができるようにしないで正六角形や正方形としてしまう失敗を起こしてしまいがちなので注意をしながら貼り付け作業をさせる. 最初の5枚は良いが, それを4つ作ってから貼り合わせようとすることはできないので, 注意喚起が必要である. 貼り上げていく際に, 最後の貼り合わせをする部分は糊付けしにくいところなので, 丁寧に作業をさせると良い.

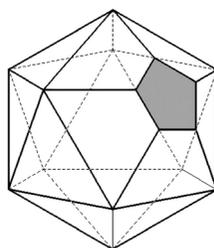


図8 二十面体の切頂のイメージ



図9 糊付けをする作業



図10 完成した切頂二十面体

作業者の手際の良さで左右されるが, 初めに正三角形を折って作る練習を除き, 多くの学生は40分~60分程度で切頂二十面体を作り上げることができる.

6. 授業実践と事後調査

(1) 授業実践の目的

初等教育教員養成課程の学生に対して、数学的活動を直接体験することを通して、数学的活動を行うことの目的と意義について自身が理解することを目的とする。

(2) 実施時期及び対象学生

実施時期：令和4年12月22日（木）1限90分

実施学校：令和4年度算数 履修の学生

対象学生：2年生（48人）

(3) 実施の方法

小学校教員養成課程の科目である令和4年度算数では、15回の講義の中で「A 数と計算」、「B 図形」、「C 測定・変化と関係」、「D データの活用」、「数学的活動」の4領域と数学的活動について、2～3回ずつ講義を実施した。「数学的活動」については、2回の講義時間を充当し、1回目は数学的活動の目的、導入の背景、配慮事項、数学的モデリングとの関係、学年ごとの取組事例について講義を行い、2回目に1コマの時間をか

けて、数学的活動の体験として、学生一人ずつが切頂二十面体を作成する活動を行った。

(4) 事後調査

切頂二十面体の作成の授業を実施後、次の事後調査を大学生に対して①～③のアンケートを記述式により行った。

- ① 製作をする上で、うまくできたところを述べて下さい。
- ② 製作をする上で、難しかったところを述べて下さい。
- ③ 作成をした上での感想を述べて下さい。

これらの結果についてまとめたものは、別表に示す。また、①から③までの記述された文章の中から、要約して考えられることを分類・整理してまとめたものが、図11～図13である。

なお、学生により記述された内容は一人の学生が複数に渡って回答してされている場合もあるため、授業実績の対象者の数と回答数は一致していない。

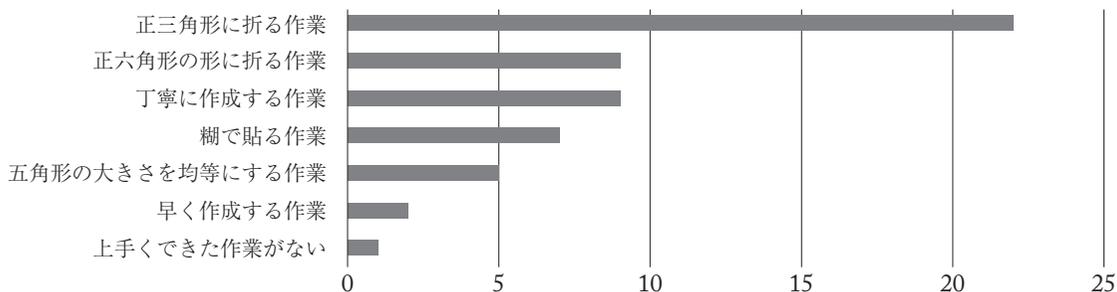


図11 ①製作をする上でうまくできたところ（複数回答含む）

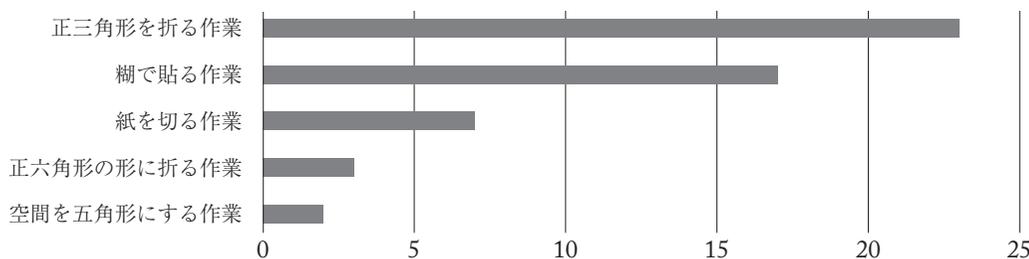


図12 ②製作をする上で難しかったところ（複数回答含む）

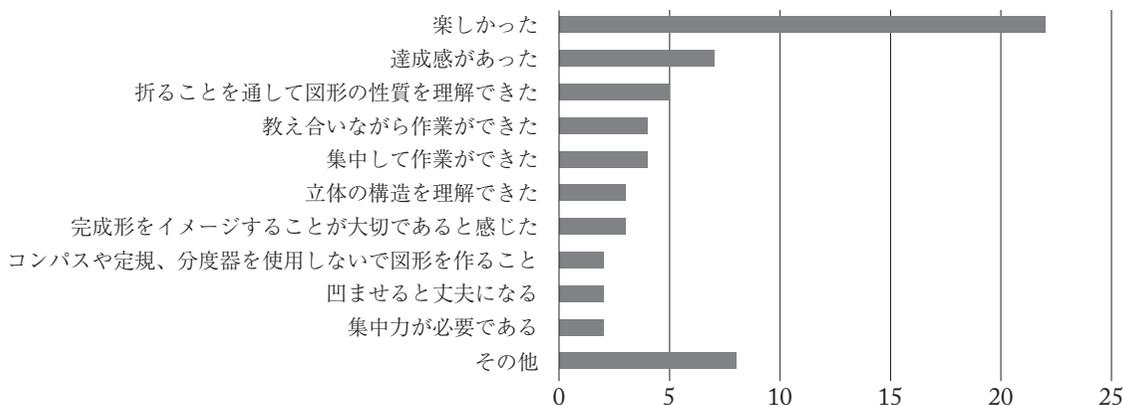


図13 ③作成をした上での感想（複数回答含む）

7. 考察

今回の切頂二十面体の作成は、すべての学生が時間内で完成させることができた。同じことを繰り返して行う場面も多いため、作成方法を理解するとすべての受講者が黙々と数学的活動に取り組んでいた。初期の目的は達成できたと考えられる。次に、事後調査の結果について考察する。

まず、製作をする上でうまくできたところについては、40[%]の受講者から正三角形を折ることを挙げていた。これは、細かい正六角形を作る際に、正三角形が正確に作れないと難しいことが挙げられる。しかし、垂直二等分線の性質を活用することで長方形から正三角形を折ることができることについて、授業の冒頭での問い掛けと練習をさせたこともあり、ほとんどの受講者は習熟できたものと考えられる。次に正六角形を折る作業についても、おおよその重心の位置を考えることで良いことについても理解できていたため、20[%]弱の受講者が指摘しており、丁寧に折り進めることができたと考えられる。最後は糊付け作業であるが、作成した正六角形の細かい誤差があるため、正五角形の穴の開け方が綺麗になるよううまく糊付けをしていた受講者が多かった。1名の受講者を除き、それぞれが上手に作業を進めていたことが結果から把握できた。

二番目として、製作をする上で難しかったところについても、40[%]強の受講者が正三角形を折ることを挙げていた。これは、①で回答した学生

とは別の学生の指摘であった。正三角形を折る練習はしたもののケント紙を使用して、小さな正三角形を折ることへの難しさを挙げていたものが多かったと考えられる。蛇腹折をすることで、折り目のズレを少しでも緩和させるようにしたが、それでも多少のズレは生じるので、一つずつ丁寧に作業を進めさせていくことが大切ではないかと考えられる。次に難しかった作業が糊付け作業である。今回は事前にスティックタイプの糊を用意するように指示をしていたが、液体タイプの糊を使用していた受講者もいた。そのため、液体タイプの糊の場合、乾いて固まるまでに時間を要するため、少しずつ貼り合わせていく場合、乾いてないままだと貼った部分にズレが生じることになり、うまくいかないことを指摘している受講者がいた。一方で、スティックタイプの糊もしっかり糊付けしないと剥がれることもあり、丁寧な作業が必要などである。また、一つ一つ貼り上げていかなければならないため、最後の糊付けをしにくいことを指摘していた受講者も3[%]程度いた。この教材では空間とする部分が正五角形であるため、比較的、指を中に入れながら作業はしやすい。しかし、最後の部分の糊付けは、図14の学生のように、最後の1ピースの糊代部分を糊付けしてから貼る方が効果的である。

加えて、空間を正五角形にする部分で、正四角形や正六角形にする貼り間違えにより、貼り直す受講者も少なからずいた。事前に空間を正五角形にすることは伝えていた。今回の授業の中では、友



図14 組み上がった最後の方はピースを糊付け

達同士おしゃべりをしながら進めていくこともできない活動である。分からないところを教え合うことができる効果もある。このミスは、授業では会話をすることの制限はしなかったため、おしゃべりをしながら意識しないで機械的に手を動かす作業だけをしていた受講者に比較的に見られたミスである。

三番目に授業の感想を述べてもらった。62個の回答類別の中で、この数学的活動を肯定的に捉えているものが53個(85[%])、否定的に捉えているものが9個(15[%])であった。一番多かった回答が、楽しかった(36[%])、折ることを通して図形的な意味が理解できた(8[%])、教えながら作業ができた(7[%])、集中して作業ができた(7[%])、立体の構造を理解できた(5[%])、コンパスや定規、分度器を使用しないで図形を作るができること(3[%])、凹ませると丈夫になること(3[%])であった。紙を折り切って立体を作り上げる数学的活動を経験したことがあまりないため、楽しい経験ができたことを指摘している受講者が多かったと考えられる。また、達成感を得られたことについても、明確な根拠があるわけではないが、20枚のピースが多くもなく少なくもないため作業的に丁度よい数ではないかと考えられる。今回、ケント紙の残部を利用すると切頂四面体と切頂八面体も作ることができる。しかし、4枚や8枚だけのピースで作成しても20枚で組み上げるほどの達成感を得られないのではないかと考えられる。一方で、図形的な意味や立体の構造の理解ができた受講者やコンパスや定規、分度器

を使用しないで図形を作るができることの数学的な意味まで言及した受講者はあまり多くはなかった。

最後に、完成した切頂二十面体を自宅まで持ち帰ることへの対応である。凹ませると丈夫になることを指摘した学生の感想に補足をする。これまでの経験から、両方の頭頂部を内部に折り込ませることで元の形より少しコンパクトになりグラファイトのような形状で強度が多少増す。フラーレンの構造異性体のように考えられるが、フラーレンの場合、炭素間の分子間引力が増すため、存在可能性があるのかどうかは分からないところである。

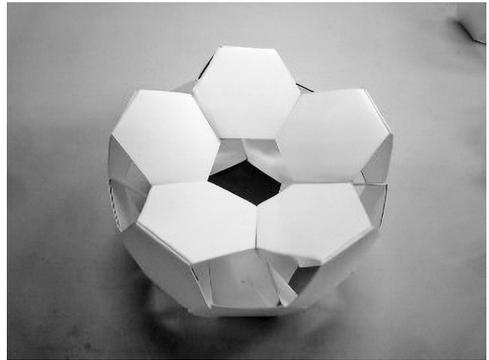


図15 頭頂部を内部に折り込ませた切頂二十面体

逆に、否定的な意見はその他に含めてあるが、次のような感想が挙げられていた。「立体を作ることは難しかった」「五角形の穴を開けるところをミスしやすい」「自分自身の作業時間の長さに驚いた」「糊でべとべとになった」「道具の使い方が難しいと感じた」「単純作業が多く集中力がもたない」「丁寧な作業が大切だと感じた」「集中力が必要である」である。これらを含めて調査項目全体を通して気になったことは、工作をする作業をあまり得意としていない受講者が多いのではないかとということである。一般に、子供のころから手先を十分使う活動をしてきていれば、「折ること・切ること・貼ること」について、苦手意識をもつことは少ないのではないかと考える。小学校では、図画・工作を指導する機会も多いと考えられるため、このような活動をより進めていくことは今後とも必要なことではないかと考えられる。

8. 指導への示唆と今後の課題

今回の実践を通して多くの学生は、この数学的活動の目的は、切頂二十面体を作り上げることにより興味・関心を高めることを含めて達成することができたため、効果はあったと考えられる。一方、所謂、「工作」を苦手とする学生には、根気強くやり遂げることへの配慮も必要であることも明らかになった。これら得られた指導への示唆と今後の課題について、次の2点を掲げる。

(1) 数学的な性質と折る活動を充実させること

今回の活動は、正三角形を折って正六角形を作ることであった。垂直二等分線の性質は理解できている、折る活動で中点を取ることや辺の長さを移すことは、算数・数学の授業や日常生活でもあまり取扱うことは多くない。そのため、測ることをしないで正三角形を折ることができることの意義について、より効果的な指導方法を工夫する必要性があると考えられる。

今回は、正三角形を折ることを冒頭の課題として、そのことを全体で確認した後、すぐに正六角形の量産する方法に活動を進めてしまったが、様々な正多角形について、その数学的な性質と折る活動で作ることについて理解を深めた上で進めていくことが考えられる。このことにより、半数近くの受講者は正確に正三角形を折ることができたが、残りの学生は、正三角形を折ることに難しさを感じていたことへの対応につながるのではないかと考えられる。

(2) 小さな立体図形から考えていくこと

今回の活動は、「切頂二十面体を作成する」という目標から入った。サッカーボールは多くの受講者にとって身近なものであると考えられるが、その複雑さから、自分自身で製作できるのか、間違えずに進めていくことができるのか、集中力を欠く受講者には繰り返しの作業で量産することへの不安があることが見受けられた。

そこで、次の改善策を講じていくことが考えられる。一点目は、切頂四面体や切頂八面体の作成を体験してから切頂二十面体の作成に進めていく

ことである。このことにより、切頂多面体の構造的な理解と作成をする上での初期の練習にもつながると考えられる。二点目は、一つの作業だけに特化しながら丁寧に進め、友達と確認しながら次のステップに進めていくことである。スモールステップにすることで工作に苦手意識をもつ学生でも着実に進めていくことができると考えられる。学生の状況によっては、事前に正三角形だけは正確なものを用意しておいて進めていくことも考えられる。

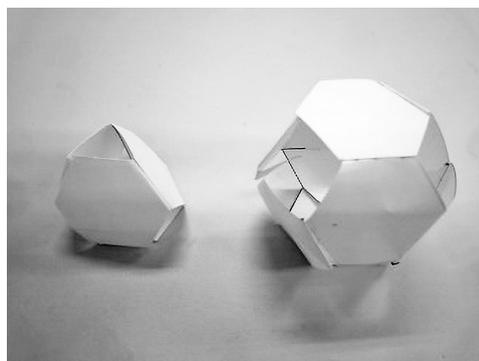


図16 切頂四面体と切頂八面体

発展教材としては、穴開き部分を変えることで別の立体も作成することが可能である。教材そのものは、中学生から大学生まで興味をもって取り組むことができるものである。今後は、より受講者の状況に合わせた授業展開の工夫を進めていくことが課題である。

注

- 1) 今回使用したケント紙は、株式会社ジツタ製 こな雪190 (特厚) 186.1 [g/m²] 規格A4 品番501Aを使用した。50枚単位で購入可能である。

引用文献

- 青木孝子 (2013). 静岡科学館る・く・るで、多面体工作のワークショップ. 日本数学教育学会 第1回春期研究大会 学会指定課題研究. Handout.
- 井上高志 (2007). 「正多面体」の教材化に関する検討: 球面正多面体の教材の開発に焦点をあてて. 日本数学教育学会 数学教育論文発表会論文集, 40.

pp.439-444.

加藤竜吾 (2023). 切頂二十面体の作成を通じた高校生と大学生の反応に関する一考察. 日本数学教育学会第105回大会発表要旨集 (青森大会), p.433.

B. Kostant (1995). The Graph of the Truncated Icosahedron and the Last Letter of Galois. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV Mitteilungen)*. pp.8-16.

黒木伸明 (2011). 作業活動による数学の創造～サッカーボールを作る～. 平成21年度西東京市立田無第二中学校1年SPP資料. Handout.

三谷純・鈴木宏正 (2005). 集約法による多面体の展開図生成手法. *図学研究*, 39 (4) (通巻110). pp.3-9.

文部科学省 (2019). 小学校学習指導要領〈平成29年告示〉解説算数編. 日本文教出版.

文部科学省 (2019). 中学校学習指導要領〈平成29年告示〉解説数学編. 日本文教出版.

文部科学省 (2020). 高等学校学習指導要領〈平成30年告示〉解説数学編・理数編. 学校図書.

中村成夫 (2017). フラーレンの化学的性質とその誘導体の合成. *日本医科大学基礎科学紀要*, 46. pp.21-36.

谷垣勝己 (1999). フラーレン (C₆₀およびナノチューブ) の最近の展開. *高分子*, 48 (3). pp.132-135.

渡辺信 (2019). サッカーボールを作る サッカーボールに潜む数学を見つける. 日本数学教育学会 第100回大会発表要旨集. p.635.

山岸弘幸 (2014). 切頂正12面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数. 応用力学研究所研究集会報告No.26AO-S2 「非線形波動研究の現状—課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲), No.05. pp.31-38.

謝辞

本稿は、加藤竜吾 (2023) による口頭発表した内容を加筆修正したものである。関係生徒、学生の皆さんに感謝します。

(2023.7.27受稿, 2023.10.19受理)